

1) Résoudre $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \leq 1$

a) Ensemble de définition.

Il faut
$$\begin{cases} x^2+1 \geq 0 & (1) \\ x^2-1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) est toujours vraie.

(2) est vérifié si $x \in]-\infty -1] \cup [1 + \infty[$

b) Résolution.

Soit $x \in]-\infty -1] \cup [1 + \infty[$

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \leq 1 \text{ si } \sqrt{x^2+1} \leq 1 + \sqrt{x^2-1}$$

(Les deux termes sont positifs) ssi $x^2+1 \leq 1 + x^2-1 + 2\sqrt{x^2-1}$

$$\text{ssi } \sqrt{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$$

(Les deux termes sont positifs) ssi $x^2-1 \geq \frac{1}{4}$

$$\text{ssi } x^2 \geq \frac{5}{4}$$

$$\text{ssi } x \in]-\infty -\frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{2} + \infty[$$

De plus $-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq -1$ et $\frac{\sqrt{5}}{2} \geq 1$ Donc

l'ensemble des solutions est

$$]-\infty -\frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{2} + \infty[$$

2) Etude de $f: x \mapsto |x-1| + |x-3| + |x-5|$

a) Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

b) Etude des signes et simplification de f :

$$\text{Si } x \in]-\infty, 1] \quad f(x) = -(x-1) - (x-3) - (x-5) \\ = -3x + 9$$

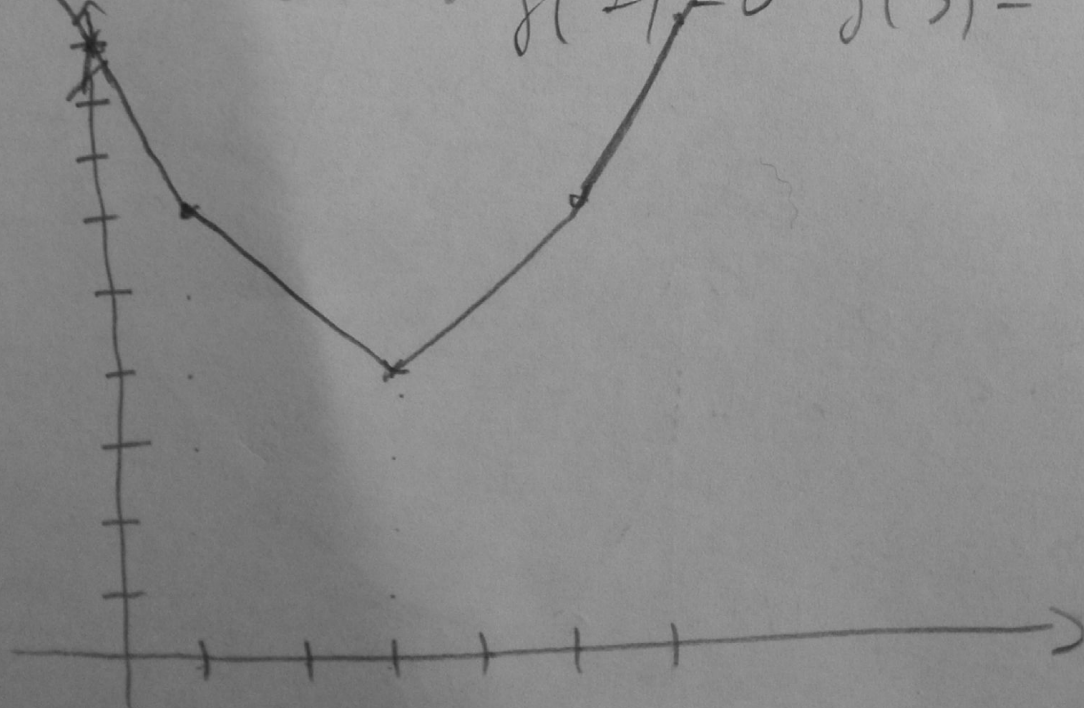
$$x \in]1, 3] \quad f(x) = (x-1) - (x-3) - (x-5) \\ = -x + 7$$

$$x \in]3, 5] \quad f(x) = (x-1) + (x-3) - (x-5) \\ = x - 1$$

$$x \in]5, +\infty[\quad f(x) = x-1 + x-3 + x-5 \\ = 3x - 9$$

c) Variations (f est dérivable sauf en 1, 3, 5)

Le tracé des droites est fait avec les pentes
et les valeurs $f(1) = 6$ $f(3) = 4$ $f(5) = 6$



3) Etude de $f: x \mapsto x^x$

a) Domaine de def

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x} \quad \text{donc } Df = \mathbb{R}^{++}$$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et pour $x \in \mathbb{R}^{++}$,

$$f'(x) = (\ln(x) + 1) e^{x \ln x}$$

c) signe de f' :

$e^{x \ln x}$ est toujours positif

$$\ln(x) + 1 \geq 0 \quad \text{si } \ln(x) \geq -1$$

$$\text{si } x \geq \frac{1}{e}$$

d) Tableau de variations

x	0	$1/e$	$+\infty$
f'		-	+
f			

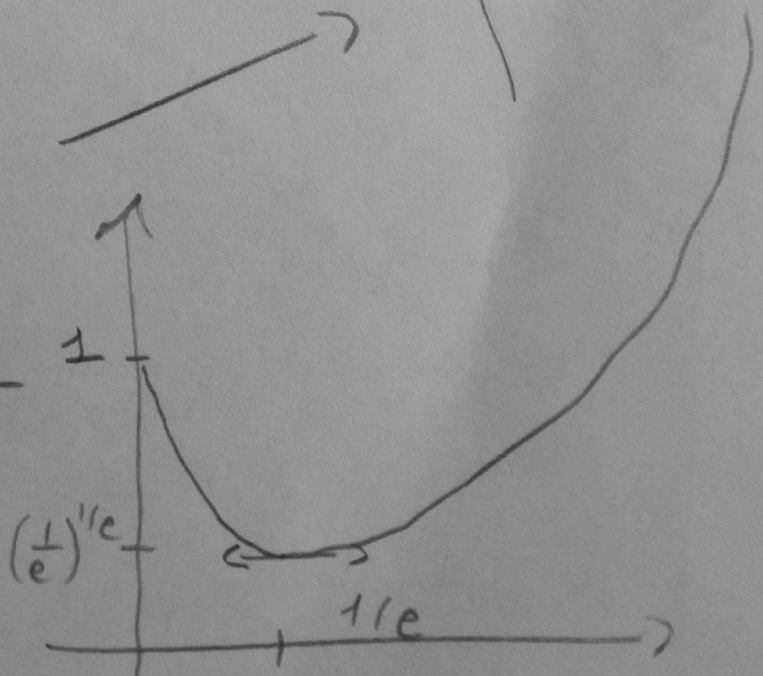
e) Limites

En 0, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^0 = 1$

En $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln x} = +\infty$



4) Résolution de $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq x - 2$

a) Ensemble de def : l'équation est définie
ssi $x^2 - x - 2 \geq 0$

or $x^2 - x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$

et racines $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$

Donc l'ensemble de définition est $] -\infty -1] \cup [2 + \infty[$

b) Résolution :

• si $x \in] -\infty -1]$ alors $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 \\ x - 2 \leq -1 - 2 < 0 \end{cases}$

donc $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 > x - 2$ donc tous les
éléments de $] -\infty -1]$ sont solution.

• si $x \in [2 + \infty[$ $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$ donc

$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq x - 2$ ssi $x^2 - x - 2 \geq x^2 - 4x + 4$

ssi $3x \geq 6$

ssi $x \geq 2$

Finalement l'ensemble des solutions est

$] -\infty -1] \cup [2 + \infty[$

5) Mq $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Idee: Mq $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour x assez grand.

Considérons $f(x) : \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

f est bien définie sur $\mathbb{R}^{++}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$
 et pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - (\ln x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Signe de f' : pour $x \in \mathbb{R}^{++}$, $2x\sqrt{x} > 0$

$$2 - \ln x \geq 0 \text{ si } \ln x \leq 2$$

$$\text{si } x \leq e^2$$

Variations:

	0	e^2	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

$$f(e^2) = \frac{\ln(e^2)}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$$

or $2 < e \leq 3$ donc $f(e^2) < 1$

Les variations de f assurent alors que
 pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$ $f(x) < 1$ c'est $\ln x < \sqrt{x}$

donc $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ Par th d'encaissement

on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

6) Limites usuelles en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{-\frac{x^2}{2}} = 1 \quad (\text{admis}) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

Sauf pour cos(admis) l'admissibilité en 0 donne le résultat: ex: $f(x) = \sqrt{1+x}$ est dérivable en 0 (car $\sqrt{\cdot}$ est dérivable en 1) et on a

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ car } \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

Croissances comparées:

On admet le (5): $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

• Mq $\lim_{y \rightarrow 0} y \ln y = 0$

On pose $y = \frac{1}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ et $y \ln y = -\frac{\ln x}{x}$

$$\text{Donc } \lim_{y \rightarrow 0} y \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

• Mq $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$

On pose $x = e^y$ alors $\lim_{y \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\frac{y}{e^y} = \frac{\ln(x)}{x}$

$$\text{Donc } \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

• Mq $\lim_{y \rightarrow -\infty} y e^y = 0$. On pose $x = -y$ alors $y e^y = \frac{-x}{e^x}$

$$\text{et } \lim_{y \rightarrow -\infty} x = +\infty \text{ donc } \lim_{y \rightarrow -\infty} y e^y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x} = 0$$