QUINZAINE 4 : DU 17 AU 29 NOVEMBRE

ECS1 2014-15

1. Programme

1.1. **Complexes.** Notation algébrique, partie réelle, imaginaire, conjugué, module. Notation exponentielle, agument.

Concernant l'étude des racines n-ièmes, le programme indique : "Les résultats concernant les racines n-ièmes de l'unité ne sont pas exigibles des étudiants" et "Les racines n-ièmes pourront être étudiées comme exemple d'utilisation de la notation exponentielle".

1.2. **Trigonométrie.** Les formules de trigonométries doivent pouvoir être utilisées rapidement, qu'elles soient connues par coeur ou retrouvée très vite (formulaire joint).

1.3. **Polynômes.** Espace vectoriel des polynômes à coefficients réels ou complexes, somme de polynômes, multiplication par un scalaire, produit de polynômes.

Degré d'un polynôme, coefficient dominant, degré d'une somme, du produit par un scalaire (espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$), degré du produit de deux polynômes.

Ces parties seront l'occasion d'un retour sur l'algèbre linéaire (familles de polynomes, libres génératrices, bases ...) et en particulier : Une famille de polynômes de degrés 2 à 2 distincts est libre.

Division euclidienne de polynômes, multiples, diviseurs, racines d'un polynôme, ordre de multiplicité d'une racine.

Dérivée d'un polynôme, formule de Taylor pour les polynômes, caractérisation de la multiplicité d'une racine par factorisation d'une puissance de $(X-\alpha)$.

Théorème de d'Alembert-Gauss (admis). Le programme indique : "Exemples simples de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Les méthodes devront être indiquées."

2. Questions de cours

(1) Formule du binôme pour les matrices.
(2) Résolution de l'équation $Z^5=1$ dans $\mathbb{C}$ et factorisations de X^5-1 dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
(3) Une famille de polynômes de degrés 2 à 2 distincts est libre.
(4) Formule de Taylor : Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$ et tout entier $n\in\mathbb{N}$, la famille $(1,(x-\alpha),\cdots,(x-\alpha)^n)$ est génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$.
(5) Caractérisation de la multiplicité d'une racine α d'un polynôme par la factorisation d'une puissance de $(X-\alpha)$ à partir de la formule de Taylor.
(6) On considère la famille de polynômes P_n définie par $P_1(X)=X$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(X)=X^2P_n'(X)+2P(X)$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, P_n est de degré n et son coefficient dominant est $(n-1)!$.

3. Prévision

Quinzaine 5 : Suites réelles, convergence.

4. Formulaire de Trigonométrie

Tableau des valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	impossible	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Relations fondamentales

$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ $1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{1}{\text{cotan}(x)}$ $1+\text{cotan}^2(x)=\frac{1}{\sin^2(x)}$

Sommes et produits

$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$ $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$ $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$	$2\cos(a)\cos(b)=\cos(a+b)+\cos(a-b)$ $2\sin(a)\sin(b)=\cos(a-b)-\cos(a+b)$ $2\sin(a)\cos(b)=\sin(a+b)+\sin(a-b)$

$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$ $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$ $2\cos^2(a)=1+\cos(2a)\quad 2\sin^2(a)=1-\cos(2a)$

Compléments

$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	$\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$
en posant $t=\tan(a)$on a $\sin(2a)=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos(2a)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan(2a)=\frac{2t}{1-t^2}$	$\cos(x)+\cos(y)=2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$ $\cos(x)-\cos(y)=-2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$ $\sin(x)+\sin(y)=2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$ $\sin(x)-\sin(y)=2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$

Formules d'Euler	**Formule de Moivre**
$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$	$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$