

Q5 Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

La formule de Taylor pour P donne:

$$\begin{aligned} P(x) &= P(\alpha) + \dots + \frac{P^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} (x-\alpha)^{n-1} + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (x-\alpha)^n + \dots \\ &\quad + \frac{P^{(d)}(\alpha)}{d!} (x-\alpha)^d + \dots \\ (*) \quad &= P(\alpha) + \dots + \frac{P^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} (x-\alpha)^{n-1} + (x-\alpha)^n \left[\frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots + \frac{P^{(d)}(\alpha)}{d!} (x-\alpha)^{d-n} \right] \end{aligned}$$

Si $(x-\alpha)^n$ divise P

alors par unicité du reste de la division de P par $(x-\alpha)^n$ on a $P(\alpha) + \dots + \frac{P^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} (x-\alpha)^{n-1} = 0$

or la famille $(1, \dots, (x-\alpha)^{n-1})$ est étagée donc libre

$$\text{donc } P(\alpha) = \dots = \frac{P^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} = 0$$

$$\text{puis } P(\alpha) = \dots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

Si $P(\alpha) = \dots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$

$$\text{Alors dans } (*) \text{ on a } P(x) = (x-\alpha)^n \left[\frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots + \frac{P^{(d)}(\alpha)}{d!} (x-\alpha)^{d-n} \right]$$

donc $(x-\alpha)^n$ divise P

Supposons
$$\begin{cases} (x-\alpha)^n \text{ divise } P \\ (x-\alpha)^{n+1} \text{ ne divise pas } P. \end{cases}$$

Alors $P(\alpha) = \dots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$ par résultat précédent
 et $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$ car sinon on aurait $P(\alpha) = \dots = P^{(n)}(\alpha) = 0$
 et donc (par résultat précédent) $(x-\alpha)^{n+1}$ divise P
 (absurde).

Donc
$$\begin{cases} P(\alpha) = \dots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(n)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Supposons
$$\begin{cases} P(\alpha) = \dots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(n)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Alors par résultat précédent $(x-\alpha)^n$ divise P
 et si $(x-\alpha)^{n+1}$ divise P alors par le résultat précédent
 alors $P(\alpha) = \dots = P^{(n)}(\alpha) = 0$ absurde.

Donc
$$\begin{cases} (x-\alpha)^n \text{ divise } P \\ (x-\alpha)^{n+1} \text{ ne divise pas } P. \end{cases}$$