Q6 $\begin{cases} P_1(x) = X \\ P_{n+1}(x) = X^2 P_n'(x) + 2P_n(x) \end{cases}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(H_n) : il existe $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tq

$$P_n(x) = (n-1)!\, X^n + Q_n(x)$$

Init : On a $P_1(x) = X$

en posant $Q_1(x) = 0 \in \mathbb{R}_0[x]$

$$P_1(x) = (1-1)!\, X^1 + Q_1(x)$$

Hérédité : Supposons qu'il existe n tq H_n soit vraie,

Calculons

$$P_{n+1}(x) = X^2 P_n'(x) + 2P_n(x)$$

$$= X^2\left((n-1)!\, X^n + Q_n(x)\right)' + 2\left((n-1)!\, X^n + Q_n(x)\right)$$

$$= X^2\left(n!\, X^{n-1} + Q_n'(x)\right) + 2(n-1)!\, X^n + 2Q_n(x)$$

$$= n!\, X^{n+1} + \left[X^2 Q_n'(x) + 2(n-1)!\, X^n + 2Q_n(x)\right]$$

On pose $Q_{n+1}(x) = X^2 Q_n'(x) + 2(n-1)!\, X^n + 2Q_n(x)$

on a $Q_n'(x)$ de degré $\leq n-2$ donc $\deg X^2 Q_n'(x) \leq n$

puis $\deg(2(n-1)!\, X^n) = n$ et $\deg 2Q_n(x) \leq n-1$

Donc $\deg Q_{n+1}(x) \leq n$ et $Q_{n+1}(x) \in \mathbb{R}_n[x]$

Donc (H_{n+1}) est vraie.