DEVOIR POUR LE 4-11

Exercice 1 (Formule du binôme pour les matrices). (1) Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ (cad A et B commutent).

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

(2) On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $AB \neq BA$ puis que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. Montrer que $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Exercice 2 (Exemple de puissances d'une matrice). On considère l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer A^2 puis A^3 et vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$.
(2) Montrer que la famille (A, A^2) est libre.
(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple (α_n, β_n) tel que $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$ et exprimer α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.
(4) Écrire un programme en Scilab demandant n à l'utilisateur et affichant les valeurs de α_n et β_n.
(5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n$. En déduire les expressions de α_n puis β_n puis A^n.

Exercice 3 (Exemple de suites LR3). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2$ et

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) On pose $a_n = u_n, b_n = u_{n+1}$ et $c_n = u_{n+2}$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

(2) En déduire un programme en Scilab qui demande n à l'tilisateur et affiche la valeur de u_n.
(3) On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Calculer P^{-1} puis montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ que l'on note D

(4) Calculer pour tout entier n les valeurs de D^n puis A^n.
(5) En déduire les expressions de $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ puis de u_n en fonction de n.

Date: ECS1 2014-15.