DEVOIR POUR LE 5-12
AUTOUR DES SUITES EXTRAITES

On rappelle le résultat suivant.

Théorème 1. *Soit* (u_n) *une suite convergeant vers* ℓ *et* $k, n \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. *Alors toutes les suites extraites de* (u_n) *de la forme* (u_{kn+p}) *convergent vers* ℓ.

1. Autour de la réciproque

(1) Soit (u_n) une suite telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Montrer que la suite (u_n) converge aussi vers cette limite.
(2) Soit (u_n) une suite telle que les trois sous-suites $(u_{3n}), (u_{3n+1})$ et (u_{3n+2}) convergent vers la même limite. Montrer que la suite (u_n) converge aussi vers cette limite.
(3) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos(\frac{2n\pi}{3})$. Montrer que les suites extraites (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) convergent vers la même limite mais que (u_n) diverge.
(4) Soit (u_n) une suite et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les suites $(u_{kn}), (u_{kn+1}), \cdots, (u_{kn+k-1})$ convergent vers la même limite ℓ. Alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

2. limites possibles

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On admet que si (u_n) converge vers ℓ alors $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

(1) Soit (u_n) une suite vérifiant une relation de récurence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que les limites possibles de (u_n) sont les solutions de l'équation $x = f(x)$.
(2) On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$. Donner les limites possibles de (u_n).
(3) On considère la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ et $u_0 = 1$. Montrer que la suite (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$. Donner un programme en SCILAB qui affiche le premier entier n tel que $u_n > 10^9$.

3. Séries alternées

Le but de cette partie est d'étudier les suites de la forme $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n u_n$, où (u_n) est une suite décroissante et convergeant vers 0. On note $a_n = S_{2n}$ et $b_n = S_{2n+1}$.

(1) Montrer que (u_n) est positive.
(2) Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
(3) En déduire que la suite (S_n) converge.
(4) Montrer que la suite $(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}})$ converge. On note ℓ sa limite.
(5) En utilisant le fait que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donner une valeur de n telle que (a_n) et (b_n) soient des valeurs approchées par excès et défaut de ℓ. Faire un programme en SCILAB qui affiche une valeur approchée par défaut et une valeur approchée par excès de la limite de la suite $(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}})$ à ε près (ε donné par l'utilisateur).

Date: ECS1 2014-15.