DM 2

I) 1) (U_{2n}) et (U_{2n+1}) cv vers la même limite notée ℓ. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$

$U_{2n} \to \ell$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq pour tout $p \geq n_0$

$$|U_{2p} - \ell| < \varepsilon \quad (1)$$

$U_{2n+1} \to \ell$: il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq pour tout $p \geq n_1$

$$|U_{2p+1} - \ell| < \varepsilon \quad (2)$$

Alors si $n \geq \max(2n_0, 2n_1+1)$

on a : Si n est pair il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $n = 2p$

et comme $n \geq 2n_0$ on a $2p \geq 2n_0$

donc $p \geq n_0$

puis $|U_{2p} - \ell| = |U_n - \ell| < \varepsilon$ par (1)

Si n est impair il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $n = 2p+1$

et comme $n \geq 2n_1+1$ on a $2p+1 \geq 2n_1+1$

$2p \geq 2n_1$

$p \geq n_1$

puis $|U_{2p+1} - \ell| = |U_n - \ell| < \varepsilon$

Finalement pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ il existe $N = \max(2n_0, 2n_1+1)$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$|U_n - \ell| < \varepsilon$$

cad (U_n) converge vers ℓ.

② De manière analogue on a :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$

$u_{3n} \to \ell$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq pour tout $p \geq n_0$

$$|u_{3p} - \ell| < \varepsilon \qquad (1)$$

$u_{3n+1} \to \ell$: il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq pour tout $p \geq n_1$

$$|u_{3p+1} - \ell| < \varepsilon \qquad (2)$$

$u_{3n+2} \to \ell$: il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tq pour tout $p \geq n_2$

$$|u_{3p+2} - \ell| < \varepsilon \qquad (3)$$

Alors pour $n \geq \max(3n_0, 3n_1+1, 3n_2+2)$

- Si n de la forme $n = 3p$ $\quad p \in \mathbb{N}$
  comme $n \geq 3n_0$ $\quad$ on a $3p \geq 3n_0$
  donc $p \geq n_0$
  et alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$
- Si n est de la forme $n = 3p+1$, $p \in \mathbb{N}$
  comme $n \geq 3n_1+1$ $\quad$ on a $3p+1 \geq 3n_1+1$
  $p \geq n_1$
  et $|u_n - \ell| < \varepsilon$
- Si n est de la forme $n = 3p+2$, $p \in \mathbb{N}$
  comme $n \geq 3n_2+2$ $\quad$ on a $3p+2 \geq 3n_2+2$
  $p \geq n_2$
  et $|u_n - \ell| < \varepsilon$

Finalement pour tout $n \geq \max(3n_0, 3n_1+1, 3n_2+2)$
on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et donc (u_n) converge vers ℓ.

3) $u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

alors $u_{3n+1} = \cos\left(\frac{2(3n+1)\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(2n\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= -\frac{1}{2}$

Donc (u_{3n+1}) converge vers $-\frac{1}{2}$

$u_{3n+2} = \cos\left(\frac{2(3n+2)\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(2n\pi + \frac{4\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$= -\frac{1}{2}$

Donc (u_{3n+2}) converge vers $-\frac{1}{2}$.

Mais $u_{3n} = \cos\left(\frac{2(3n)\pi}{3}\right)$

$= \cos(2n\pi)$

$= 1$

Donc (u_n) a deux suites extraites (u_{3n}) et (u_{3n+1}) qui ne convergent pas vers la meme limite

Donc (u_n) diverge.

④ De manière analogue à ① et ② on a :
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$
pour $p \in [\![0, k-1]\!]$ on a :

$u_{kn+p} \to \ell$ donc il existe $n_p \in \mathbb{N}$ tq pour tout $j \geq n_p$ on a :

$$|u_{kj+p} - \ell| < \varepsilon$$

Puis pour $n \geq \max(kn_0, kn_1+1, \dots, kn_{k-1}+k-1)$ on a :

Si n est de la forme $kj+p$ avec $p \in [\![0, k-1]\!]$ (division euclidienne de n par k).

$n \geq kn_p + p$ donc $kj+p \geq kn_p + p$.

donc $j \geq n_p$

et $|u_{kj+p} - \ell| = |u_n - \ell| < \varepsilon$

Finalement $|u_n - \ell| < \varepsilon$ donc (u_n) converge vers ℓ.

II) 1) On a $u_{n+1} = f(u_n)$

Si (u_n) converge vers ℓ alors par la prop $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$

si (u_n) converge vers ℓ alors la suite extraite (u_{n+1}) converge vers ℓ

Alors à la limite on obtient $\ell = f(\ell)$
et donc les limites possibles sont les solutions de
$x = f(x)$

2) Si $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$ et si $(u_n) \to \ell$ on a à la limite $\ell = \ell^2 - \ell + 1$
or l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ de discriminant
$\Delta = 4 - 4 = 0$ donc de solution $\ell = 1$.
donc la seule limite possible est $\ell = 1$

3) Si $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ et si $(u_n) \to \ell$ alors on a $\ell = \ell^2 + 1$, équation qui n'a pas de solution donc (u_n) diverge.

De plus $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1$
or $x^2 - x + 1$ est toujours positif
donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et (u_n) croissante

(U_n) est une suite croissante qui diverge donc $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Programme :

```
// Initialisation
   n=0;
   U=1;
// Boucle
 while U<10^9 do
      U=U^2+1;
      n=n+1;
 end;
// Affichage
 disp(n);
```

III) Series alternées

On considère (U_n) decroissante vers 0.

1) Mq (U_n) est positive par l'absurde.

Sinon il existe n_0 tq $U_{n_0} < 0$

puis comme (U_n) est decroissante on a

pour tout $n \geq n_0$ $U_n \leq U_{n_0}$.

Puis à la limite $0 \leq U_{n_0}$

or $U_{n_0} < 0$

donc $0 < 0$ Absurde.

2) Montrons que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

$a_{n+1} = S_{2(n+1)} = S_{2n+2}$

$$a_{n+1} - a_n = S_{2n+2} - S_{2n}$$
$$= \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k v_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k v_k$$
$$= (-1)^{2n+2} v_{2n+2} + (-1)^{2n+1} v_{2n+1}$$
$$= v_{2n+2} - v_{2n+1}$$

or (v_n) decroissante donc $v_{2n+2} \leq v_{2n+1}$

donc $v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$

cad $a_{n+1} - a_n \leq 0$

et (a_n) decroissante

$b_{n+1} = S_{2(n+1)+1} = S_{2n+3}$

$$b_{n+1} - b_n = \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^k v_k - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k v_k$$
$$= (-1)^{2n+3} v_{2n+3} + (-1)^{2n+2} v_{2n+2}$$
$$= -v_{2n+3} + v_{2n+2}$$

or (v_n) decroissante donc $-v_{2n+3} + v_{2n+2} \geq 0$

donc $b_{n+1} - b_n \geq 0$

et (b_n) est croissante.

$$|b_n - a_n| = |S_{2n+1} - S_{2n}|$$
$$= |(-1)^{2n+1} u_{2n+1}|$$
$$= |u_{2n+1}|$$

et (u_n) tend vers 0 donc $|b_n - a_n|$ tend vers 0.

Finalement (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

3) Alors (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ. Donc par I on a (S_n) converge vers ℓ.

4) On a $\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ de la forme $\left(\sum (-1)^n v_n\right)$ avec $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

On a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} < 0$

donc (v_n) decroissante

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Donc par les questions precedentes on a (S_n) converge cad $\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge

5) Comme $(a_n)(b_n)$ adjacentes et convergent vers ℓ

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} a_n \leq \ell \leq b_n \\ a_n \to \ell \quad a_n \searrow \\ b_n \to \ell \quad b_n \nearrow \end{cases}$

Donc (a_n) est une valeur approchée de ℓ par excès et (b_n) par defaut.

Si on considere la suite $\left(\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \to \ell$

on a $\begin{cases} a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\ b_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \end{cases}$

et $|b_n - a_n| = \left|\frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

donc $|b_n - a_n| < \varepsilon$ ssi $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \varepsilon$

ssi $\frac{1}{2n+1} < \varepsilon^2$ car $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \geq 0$

ssi $2n+1 > \frac{1}{\varepsilon^2}$

ssi $n \geq \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2}$

Donc pour $n = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1$ on a

$a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ est une valeur approchée par excès

$b_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ ——— ——— defaut

D'où le programme suivant.

```
// paramètres
epsilon = input('précision?');
n = floor( 1/(2*epsilon^2) - 1/2 ) + 1;
// Calcul des sommes:
S = 0;
for k = 1 : 2*n do
    S = S + ((-1)^k) / sqrt(k);
end
// Affichage des résultats.
a = S;
b = S - 1/sqrt(2*n+1);
disp(a, b);
```