DEVOIR SURVEILLÉ 1

ECS1 4-10-14

Exercice 1. Étudier la fonction définie par $f(x) = |x-1|+|x^2-x-1|$: ensemble de définition, dérivabilité et tableau de variations.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^{x+1}$.

(1) Donner l'ensemble de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée de f.
(2) On considère $g(x) = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x}$. Étudier g et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $g(x) > 0$.
(3) En déduire les variations de f.
(4) Donner un programme qui trace f sur $[0.1, 2]$.

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 4. Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ est inversible et si oui calculer son inverse.

Exercice 5. Déterminer pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système S_λ n'est pas de Cramer.

$$S_\lambda : \begin{cases} (4-\lambda)x + 3y & = & 0 \\ 2x + (1+\lambda)y & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 6 (Calculs de sommes). Dans cet exercice, on cherche les sommes des coefficients de certaines matrices. Les questions sont largement indépendantes.

(1) Calculer la somme des coefficients de la matrice carrée de taille $n \times n$ et de coefficients tous égaux à 1 : $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
(2) On cherche la somme des coefficients de la matrice triangulaire inférieure de coefficients tous égaux à 1.
   (a) Première méthode : on veut montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété (H_n) : la somme des coefficients de la matrice triangulaire inférieure de coefficients tous égaux à 1 est $\frac{1}{2}n(n+1)$.
   Calculer cette somme pour $n = 1$ puis $n = 2$, c'est-à-dire les matrices $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   En notant que l'on a :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ \hline 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{array}\right),$$
   faire l'hérédité.
   (b) Seconde méthode : pour tout $i = 1, \cdots, n$ donner le nombre de 1 sur la ligne i puis en sommant les résultats des lignes, montrer que la somme des coefficients de cette matrice est $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Date: ECS1 4-10-2014.

(3) On considère la matrice triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Montrer que la somme des coefficients de la ligne i est $\sum_{j=1}^{i} j$ puis calculer la somme des coefficients de cette matrice.

(4) On considère la matrice triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1^2 & 2^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & (n-1)^2 & 0 \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & \cdots & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que la somme des coefficients de cette matrice est $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j^2$ puis la calculer.

Exercice 7 (Problème autour des suites LR2). (1) On considère l'ensemble S des suites (un) satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

(a) Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est constante puis que (u_n) est arithmétique.

(b) Soit r, s deux réels. Montrer qu'il existe une suite de S et une seule telle que $u_0 = r$ et $u_1 = s$.

(c) Soit r, s deux réels et p, q deux entiers. Montrer qu'il existe une suite de S et une seule telle que $u_p = r$ et $u_q = s$.

(d) Déterminer la suite (v_n) de S telle que $v_0 = 5$ et $v_1 = 3$.

(e) Déterminer la suite (w_n) de S telle que $v_6 = 21$ et $v_9 = 33$.

(2) Soit a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$. On considère l'ensemble S des suites (u_n) satisfaisant à la relation de récurrence $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

(a) Prouver que si (u_n) et (v_n) sont deux suites de S, alors, quels que soient les réels λ, μ, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ est élément de S.

(b) Soit r, s deux réels. Prouver qu'il existe une suite de S et une seule telle que $u_0 = r$ et $u_1 = s$.

(c) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de S telles que $u_0v_1 - v_0u_1 \neq 0$. Montrer que quelle que soit la suite (w_n) de S il existe des réels α et β tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$.

(3) Soit a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. On considère l'ensemble S des suites (u_n) satisfaisant à la relation de récurrence $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$

(a) Montrer qu'il existe deux réels r_1 et r_2 tels que les suites géométriques de raisons respectives r_1 et r_2 appartiennent à S.

(b) En déduire que quelle que soit la suite (u_n) de S, il existe des réels α et β tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha(r_1)^n + \beta(r_2)^n$.

(c) Déterminer la suite (u_n) telle que $u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0, \quad u_0 = 2$ et $u_1 = 7$.

(4) Soit a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac = 0$. On considère l'ensemble S des suites (u_n) satisfaisant à la relation de récurrence $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

(a) Montrer qu'il existe un réel r tel que la suite géométrique (v_n) de raison r appartienne à S.

(b) Soit (u_n) une suite de S. On considère la suite (v_n) telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r^n v_n$. À quelle relation de récurrence la suite (v_n) satisfait-elle ? (on rappelle que $c = \frac{b^2}{4a}$ et $r = \frac{-b}{2a}$).

(c) Montrer qu'il existe α et β réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$. (On pourra utiliser la question 1).

(d) Déterminer la suite (u_n) telle que $4u_{n+2} + 4u_{n+1} + u_n = 0, \quad u_2 = 2$ et $u_5 = \frac{1}{2}$.