

CR2

$$\begin{aligned} \text{d) } \& \quad v_{n+1} &= v_{n+2} - v_{n+1} \\ &= 2v_{n+1} - v_n - v_{n+1} \\ &= v_{n+1} - v_n \\ &= v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) constante égale à $v_2 - v_0$

$$\begin{aligned} \text{e) } & \text{donc } v_{n+1} - v_n = v_1 - v_0 \\ & v_{n+1} = v_n + (v_1 - v_0) \text{ est arithmétique} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \text{On a } v_{n+1} = v_n + (s-r) \\ & \text{donc } v_n = r + n(s-r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & (v_n) \text{ arithmétique donc il existe } a \text{ tq } v_n = a \cdot n + v_0 \\ & \text{On a } \begin{cases} v_p = r \\ v_q = s \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} ap + v_0 = r \\ aq + v_0 = s \end{cases} \text{ donc } a = \frac{r-s}{p-q} \\ & v_0 = r - p \cdot \frac{r-s}{p-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } v_n &= \left(\frac{r-s}{p-q} \right) \cdot n + r - p \cdot \frac{r-s}{p-q} \\ &= \frac{r-s}{p-q} (n-p) + r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_1 = 3 \end{cases} \text{ donc par b } \begin{aligned} v_n &= 5 + n \cdot (3-5) \\ v_n &= 5 - 2n \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } & \begin{cases} v_6 = 21 \\ v_9 = 33 \end{cases} \text{ donc par c } \begin{aligned} w_n &= \frac{21-33}{6-9} (n-6) + 21 \\ w_n &= 4(n-6) + 21 \\ w_n &= 4n - 3 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$2) \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$$

$$a) \quad \text{On pose } w_n = \lambda u_n + \mu v_n$$

$$\begin{aligned} \text{On a } a w_{n+2} &= a(\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}) \\ &= \lambda(a u_{n+2}) + \mu(a v_{n+2}) \\ &= \lambda(-b u_{n+1} - c u_n) + \mu(-b v_{n+1} - c v_n) \\ &= -b(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - c(\lambda u_n + \mu v_n) \end{aligned}$$

$$\text{donc } a w_{n+2} = -b w_{n+1} - c w_n$$

(w_n) vérifie la relation de S.

$$b) \quad \text{On pose } H_n: \text{ il existe une unique suite } u \in S \text{ et } \begin{cases} u_0 = r \\ u_1 = s. \end{cases}$$

init H_0 vraie

Hérédité supp il existe n tq $H_n \Rightarrow H_{n+1}$ vraie.

Alors u_n et u_{n+1} sont bien définies et uniques
puis $u_{n+2} = \frac{1}{a}(-b u_{n+1} - c u_n)$ est bien
défini et unique.

$$c) \quad \text{Cherchons } \alpha \text{ et } \beta \text{ tq } \begin{cases} \alpha u_0 + \beta v_0 = w_0 \\ \alpha u_1 + \beta v_1 = w_1 \end{cases}$$

alors comme $u_0 v_1 - v_0 u_1 \neq 0$ la matrice $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{pmatrix}$
est inversible donc le système admet une
unique solution.

Ensuite (w_n) et $(\alpha u_n + \beta v_n)$ sont deux
suites de S telles que $\begin{cases} w_0 = \alpha u_0 + \beta v_0 \\ w_1 = \alpha u_1 + \beta v_1 \end{cases}$

donc par b (unicité) les suites (w_n) et $(\alpha u_n + \beta v_n)$
sont égales.

$\mathbb{C}R^2$

3) a) r_1 et r_2 les racines de $ax^2 + bx + c$
donc $ar_i^2 = -br_i - c$ pour $i=1,2$

Posez $u_n = r_i^n$
 $ar_i^{n+2} + br_i^{n+1} + cr_i^n = r_i^n (ar_i^2 + br_i + c) = 0$

b) On pose $u_n = r_1^n$ $v_n = r_2^n$
on a $u_0 v_1 - v_0 u_1 = r_1^0 r_2^1 - r_2^0 r_1^1 = r_2 - r_1$
or $r_1 \neq r_2$ donc $u_0 v_1 - v_0 u_1 \neq 0$
donc par (2c) pour tout (w_n) de S il existe un unique couple (α, β) de reals
tel que $w_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$

c)
$$\begin{cases} u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0 \\ u_0 = 2 \quad u_1 = 7 \end{cases}$$

$X^2 + 2X - 3$ a pour discriminant $4 + 12 = 16 = 4^2$

$$r_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad r_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

u_n est de la forme $\alpha 1^n + \beta (-3)^n$

$$u_0 = 2 = \alpha + \beta (-3)^0 \quad \alpha + \beta = 2$$

$$u_1 = 7 = \alpha + \beta (-3) \quad \alpha - 3\beta = 7$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{13}{4} \\ \beta = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

4) a) r racine de ax^2+bx+c

$$ar^{n+2} + br^{n+1} + cr^n = r^n (ar^2 + br + c) = r^n \cdot 0 = 0$$

donc (r^n) appartient à S .

b) $(v_n) \in S \quad v_n = u_n \cdot r^{-n} \quad u_n = v_n \cdot r^n$

On a $av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = 0$

cad $ar^{n+2}v_{n+2} + br^{n+1}v_{n+1} + cr^nv_n = 0$

cad $r^n \left(a \left(\frac{-b}{2a} \right)^2 v_{n+2} + b \left(\frac{-b}{2a} \right) v_{n+1} + \frac{b^2}{4a} v_n \right) = 0$

cad $\frac{r^n}{4a} (b^2 v_{n+2} - 2b^2 v_{n+1} + b^2 v_n) = 0$

cad $\frac{r^n b^2}{4a} (v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n) = 0$

cad $(v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0)$

cad v_n satisfait la relation du 1.

c) Donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $v_n = (\alpha + \beta n)$
donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $u_n = (\alpha + \beta n) r^n$

d) Si (v_n) vérifie $\begin{cases} 4v_{n+2} + 4v_{n+1} + v_n = 0 \\ v_2 = 2 \text{ et } v_5 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Delta = 16 - 16 = 0$
 $r = \frac{-4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $v_n = (\alpha + \beta n) \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$\begin{cases} v_5 = \frac{1}{2} = (\alpha + 5\beta) \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \\ v_2 = 2 = (\alpha + 2\beta) \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 5\beta = -16 \\ \alpha + 2\beta = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -8 \\ \beta = -8 \end{cases}$$