

$$f(x) = x^{x+1} = e^{(x+1)\ln x}$$

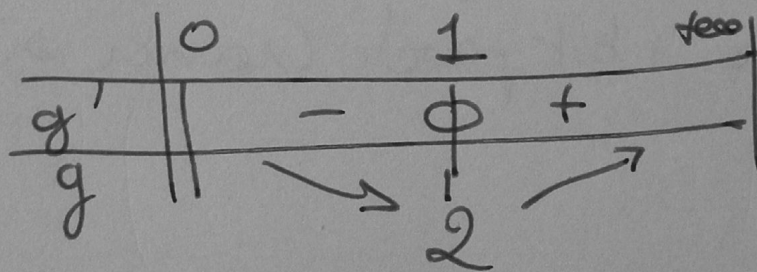
$$Df = \mathbb{R}^{++}$$

f dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$

$$f'(x) = \left(\ln x + \frac{x+1}{x} \right) e^{(x+1)\ln x}$$

$$g(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{x} \quad g \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^{++}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$



$$g(1) = \ln(1) + \frac{1+1}{1} = 2$$

donc g positive

Donc f' aussi et donc f est croissante.

```
x = [0.1:0.01:2];
y = x.^ (x+1);
plot(x, y)
```

Etude de $f(x) = |x-1| + |x^2 - x - 1|$

f est définie sur $\mathbb{R}$. et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

Signe de $x^2 - x - 1$: discriminant $\Delta = 5$

racines $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$ x-1 $	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$	
$ x^2-x-1 $	x^2-x-1	$-x^2+x+1$	$-x^2+x+1$	x^2-x-1	
f	x^2-2x	$-x^2+2$	$-x^2+2x$	x^2-2	
f'	$2x-2$	$-2x$	$-2x+2$	$2x$	
$\text{sg } f'$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$\text{var } f$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$$(U_n) \text{ def par } u_0 = 1 \quad u_1 = 1 \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$(H_n) : u_n = 2^{n-1}$$

$$H_1 : u_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

Hérédité Supposons qu'il existe n tel pour tout $k \leq n$
 H_k soit vraie.

Calculons

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^n u_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \quad (\text{par } H_k) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^n 2^k \\ &= 1 + \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ &= 1 - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

El par récurrence forte on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 $u_n = 2^{n-1}$