

$$\underline{E \times 3:1} \Rightarrow v_{n+3} = -2v_{n+2} + v_{n+1} + 2v_n$$

$$\begin{cases} a_n = v_n & a_{n+1} = v_{n+1} = b_n \\ b_n = v_{n+1} & b_{n+1} = v_{n+2} = c_n \\ c_n = v_{n+2} & c_{n+1} = v_{n+3} = -2v_{n+2} + v_{n+1} + 2v_n \\ & = 2a_n + b_n - 2c_n \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ -\lambda y + z = 0 \\ 2x + y + (-2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Δ est équivalent à (Méthode de Pivot de Gauss)

$$\begin{cases} 2x + y + (-2-\lambda)z = 0 & L_1 \\ -\lambda y + z = 0 & L_2 \\ (2+\lambda)y + \lambda(-2-\lambda)z = 0 & 2L_1 + \lambda L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + (-2-\lambda)z + y = 0 \\ z - \lambda y = 0 & L_2 \\ ((2+\lambda) - \lambda(-2-\lambda)(-\lambda))y = 0 & L_3 - \lambda(2-\lambda)L_2 \end{cases}$$

Le système est triangulaire donc n'est pas de Cramer si $2 + \lambda + \lambda^2(-2 - \lambda) = 0$

$$\text{ssi } -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

1 est racine évidente et on a

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 3\lambda - 2)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

Donc le système n'est pas de Cramer si $\lambda \in \{1, -1, -2\}$

2) $\boxed{\lambda = 1}$ Alors

S_1 est équivalent à:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ssi} \begin{cases} 2x + y = 3z \\ -y = -z \end{cases} \text{ssi} \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est solution si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc l'ensemble des solutions est $\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

3) $\boxed{\lambda = -1}$ Alors

S_{-1} est équivalent à

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ssi} \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est solution si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc l'ensemble des solutions est $\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

4) $\boxed{\lambda = -2}$

S_{-2} est équivalent à

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ si } \begin{cases} y = -2x \\ z = 4x \end{cases} \text{ ssi } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

5) Famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$:

Liberté: Soit λ, μ, ν tq

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{cad } \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu - 2\nu = 0 \\ \lambda + \mu + 4\nu = 0 \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ -2\mu - 3\nu = 0 \\ 3\nu = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1 \end{matrix}$$

cad $\lambda = \mu = \nu = 0$ Donc la famille est libre.

génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ Existe-t-il toujours $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$

$$\text{tg } \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{cad } \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = a \\ \lambda - \mu - 2\nu = b \\ \lambda + \mu + 4\nu = c \end{cases} \quad \text{cad } \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = a \\ 2\mu + 3\nu = a - b \quad L_1 - L_2 \\ 3\nu = -a + c \quad L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\text{cad } \begin{cases} \lambda = a - (a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c) - (-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c \\ \mu = \frac{1}{2}(a - b + a - c) = a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ \nu = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

Le système admet toujours une solution donc la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$

donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

III) 1) On a par (I 2) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ puis par récurrence $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

2) Le calcul fait en II 5 - génératrice donne

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = a \\ \lambda - \mu + 2\nu = b \\ \lambda + \mu + 4\nu = c \end{cases} \quad \text{mi } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c \\ \mu = a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ \nu = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

(4)

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$3) \text{ On a } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = D$$

4) Par récurrence on a $A^n = PD^nP^{-1}$

$$5) \text{ Par récurrence } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

$$\text{puis } A^n = PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & (-2)^n \\ 1 & (-1)^{n+1} & (-2)^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & (-2)^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 + (-1)^n - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{3}(-2)^n \\ \frac{1}{3} + (-1)^{n+1} - \frac{1}{3}(-2)^{n+1} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{n+1} & \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}(-2)^{n+1} \\ \frac{1}{3} + (-1)^n - \frac{1}{3}(-2)^{n+2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{3}(-2)^{n+2} \end{pmatrix}$$

⑤

$$\text{Puis } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n + 2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{3}(-2)^n \right)$$

$$v_n = a_n = \frac{5}{6} + \frac{3}{2}(-1)^{n+1} - \frac{1}{3}(-2)^{n+1}$$

Remarque bien $v_0 = 0$ $v_1 = 1$ et $v_2 = 2$

IV 1)

$n = \text{input}('n?');$

$a = 0; b = 1; c = 2;$

for $k = 1:n$ do

temp1 = b;

temp2 = c;

$c = -2 \times c + b + 2 \times a;$

$a = \text{temp1};$

$b = \text{temp2};$

end;

disp(a);

2) $A = [0, 1, 0; 0, 0, 1; 2, 1, -2]; B = [0; 1; 2];$

$n = \text{input}('n?');$

$B = (A^n) * B;$

$v = B(1)$

disp(v)