

DS2

exo 1: $\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

1) $\alpha = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{1+3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{Re}(\alpha) = -\frac{1}{2}$ et $\operatorname{Im}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $|\alpha| = 1$ et un argument est $\frac{2\pi}{3}$.

Donc $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

3) $z^3 = \alpha$

a) $0^3 = 0 \neq \alpha$ donc 0 n'est pas solution

b) Alors $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{++}$, $\theta \in \mathbb{R}$

puis $z^3 = \alpha$ soi $(\rho e^{i\theta})^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

soi $\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

c) Donc l'ensemble des solutions est $\left\{ e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) En divisant $k \in \mathbb{Z}$ par 3 on a l'existence de $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$ tq $k = q \cdot 3 + r$

$$\begin{aligned} \text{puis } e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)} &= e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + 2 \cdot \frac{3q\pi}{3} + 2 \cdot \frac{r\pi}{3}\right)} \\ &= e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + 2r\frac{\pi}{3}\right)} \cdot e^{2q\pi} \\ &= e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + 2r\frac{\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

avec $r=0, 1$ ou 2 donc $e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + 2r\frac{\pi}{3}\right)}$ appartient
à $\left\{ e^{i\frac{2\pi}{9}}, e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + 2\frac{\pi}{3}\right)}, e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + 2\frac{2\pi}{3}\right)} \right\}$

$$\text{rad} \left\{ e^{\frac{2i\pi}{9}}, e^{\frac{8i\pi}{9}}, e^{\frac{14i\pi}{9}} \right\}$$

4) $z^3 - \alpha = 0$ so: $z = e^{\frac{2i\pi}{9}}$ ou $e^{\frac{8i\pi}{9}}$ ou $e^{\frac{14i\pi}{9}}$
donc $z^3 - \alpha = (z - e^{\frac{2i\pi}{9}})(z - e^{\frac{8i\pi}{9}})(z - e^{\frac{14i\pi}{9}})$