

Exercice 2

$$1) S = \sum_{k=0}^n (2^{2k} + 2(k+1)^2)$$

$$= \sum_{k=0}^n 4^k + 2 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + 2 \sum_{k=0}^n 1$$

$$= \frac{1-4^{n+1}}{1-4} + 2 \frac{n(n+1)}{2} + 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2(n+1)$$

$$= -3 + 3 \cdot 4^{n+1} + (n+1) \left(n + n \cdot \frac{4n+2}{3} + 2 \right)$$

$$= -3 + 3 \cdot 4^{n+1} + (n+1) \left(\frac{4}{3} n^2 + \frac{5}{3} n + 2 \right)$$

$$2) \text{ On pose } E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z \right\}$$

Il faut vérifier que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

$$E \subset \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E \text{ car } 0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0 \text{ donc } E \neq \emptyset$$

$$\text{Soit } \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in E.$$

$$\text{On a } (\lambda x + x') - (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') =$$

$$\lambda(x - y + 2z) + (x' - y' + 2z') = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

$$\text{Donc } \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in E$$

Donc E est stable par $\subset$ et est un ev.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E \text{ si } x = y - 2z$$

$$\text{si } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E \text{ car } 1 - 1 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E \text{ car } -2 - 0 + 2 \cdot 1 = 0$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de E .

De plus Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Alors } \begin{cases} \lambda - 2\mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \text{ donc } \lambda = \mu = 0 \text{ et la famille}$$

est libre donc c'est une base de E .

$$3) \text{ On considère } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

généralice de $\mathbb{R}^3$? Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} \alpha + \beta + \delta = a \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = b \\ \alpha + \beta + \gamma + 2\delta = c \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} \alpha + \beta + \delta = a \\ \beta + \gamma = b - a \quad \text{C}_2 - \text{C}_1 \\ \gamma + \delta = c - a \quad \text{C}_3 - \text{C}_1 \end{cases}$$

②

si $\delta = 0$ on a

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \beta + \gamma = b - a \\ \gamma = c - a \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} \alpha = -a - b + c \\ \beta = b - c \\ \gamma = c - a \end{cases} \text{ convient}$$

Donc la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$

Liberté? Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tq

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{cad } \begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 0 \end{cases} \text{ssi } \begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \quad L_2 - L_1 \\ \gamma + \delta = 0 \quad L_3 - L_1 \end{cases}$$

$\delta = 1, \gamma = -1, \beta = 1, \alpha = -2$ est une solution
différente de 0,0,0,0 donc la famille n'est pas libre
et en particulier $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } \mathbb{R}^3 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\text{ct} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Liberté de $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$?

$$\text{Soit } \lambda, \mu, \nu \text{ tq } \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{cad } \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 2\mu + \nu = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = 0 \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \quad L_2 - L_1 \\ \nu = 0 \quad L_3 - L_1 \end{cases} \quad (3)$$

donc $d = \mu = \nu = 0$

et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre

Donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

4) On considère la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Libre? Soit $d, \mu \in \mathbb{R}$ tq

$$d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{cad } \begin{cases} d + \mu = 0 \\ d + 2\mu = 0 \\ d + \mu = 0 \end{cases} \quad \text{cad } \begin{cases} d + \mu = 0 \\ \mu = 0 \quad \text{L}_2 - \text{L}_1 \end{cases}$$

donc $d = \mu = 0$ et la famille est libre.

Générateur de $\mathbb{R}^3$?

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ Existe-t-il $d, \mu \in \mathbb{R}$ tq

$$d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{cad } \begin{cases} d + \mu = a \\ d + 2\mu = b \\ d + \mu = c \end{cases} \quad \text{cad } \begin{cases} d + \mu = a \\ \mu = b - a \quad \text{L}_2 - \text{L}_1 \\ 0 = c - a \quad \text{L}_3 - \text{L}_1 \end{cases}$$

$$\text{cad } \begin{cases} d = 2a - b \\ \mu = -a + b \\ a - c = 0 \end{cases}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ n'est pas
générateur de $\mathbb{R}^3$ et

$$\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, a - c = 0 \right\}$$

On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ car $1 - 0 \neq 0$
 donc la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est libre

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ Existe-t-il d, μ, ν tq

$$d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{cad } \begin{cases} d + \mu + \nu = a \\ \mu + 2\nu = b \\ \mu + \nu = c \end{cases}$$

$$\text{cad } \begin{cases} d + \mu + \nu = a \\ \mu + 2\nu = b \\ -\nu = b + cL_3 - L_2 \end{cases}$$

Le système est triangulaire sans zéros l'adjointe
 donc de Cramer donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est
 une base de $\mathbb{R}^3$.