

Ex 1. ① On note P "le résultat est positif" et E : "la personne est en état d'ébriété".

On cherche $P_P(E) = \frac{P_E(P) \cdot P(E)}{\text{par Bayes sur } (E, \bar{E})}$

$$= \frac{P_E(P) \cdot P(E) + P_{\bar{E}}(P) \cdot P(\bar{E})}{0,95 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,98}$$

$$= \frac{0,0019}{0,0019 + 0,049} = \frac{0,0019}{0,0509}$$

$$= \frac{19}{509}$$

2) On cherche

$$P_{\bar{P}}(\bar{E}) = \frac{P_{\bar{E}}(\bar{P}) \cdot P(\bar{E})}{P(\bar{P})} = \frac{0,95 \cdot 0,98}{0,9491}$$

3) La probabilité cherchée est

$$P((E \cap \bar{P}) \cup (\bar{E} \cap P)) = P(E \cap \bar{P}) + P(\bar{E} \cap P)$$

union disjointe

$$= P_E(\bar{P}) \cdot P(E) + P_{\bar{E}}(P) \cdot P(\bar{E})$$

$$= 0,05 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,98$$

$$= 0,05$$

2) Notons les coffres C_1, C_2, C_3 avec

C_1 : 2 pièces Or

C_2 : 1 — Ag 1 Or

C_3 : 2 — Ag

C_i : trouver une pièce Or

C_i : trouver le coffre i

On cherche $P_0(C_1) = \frac{P_{C_1}(0) P(C_1)}{P_{C_1}(0) P(C_1) + P_{C_2}(0) P(C_2) + P_{C_3}(0) P(C_3)}$

$$P_0(C_1) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0}$$

$$P_0(C_1) = \frac{2}{3}$$

Ex 3: 1) $u_0 = 1$ $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$

a) Si $u_n \rightarrow l$ alors l vérifie $l = \frac{3l + 2}{l + 2}$

car $l^2 + 2l = 3l + 2$

car $l^2 - l - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$ donc $l = \frac{1-3}{2} = -1$

ou on a $u_n \geq 0$ (rec immédiate) ou $l = \frac{1+3}{2} = 2$

donc $l \geq 0$ Donc la seule limite possible est 2

b) Posons $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 2}$ f dérivable car

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x+2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} \geq 0$$

on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{3+2}{1+2} = \frac{5}{3} \geq 1$

puis par récurrence on montre

$$H_n: u_n \leq u_{n+1}$$

init $u_0 \leq u_1$

hérédité ... On a $u_n \leq u_{n+1}$
 $f \nearrow$ donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$
cad $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

Finalement $(u_n) \nearrow$

c) $H_n: 0 \leq u_n \leq 2$

init OK

Hérédité: si on a $0 \leq u_n \leq 2$

alors $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} \geq 0$

puis $u_n \leq 2$ et $f \nearrow$ donc $f(u_n) \leq f(2)$

or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(2) = 2$

Donc $u_{n+1} \leq 2$

d) (u_n) croissante majorée par 2 donc CV

puis 2 seule limite possible par 1 donc $u_n \rightarrow 2$

2) $v_0 = 4$ $v_{n+1} = \frac{3v_n + 2}{v_n + 2}$

a) Comme (2) seule limite possible 2

b) $v_1 = \frac{12+2}{4+2} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \leq \frac{12}{3} = 4$

Posez $H_n: v_{n+1} \leq v_n$

init $v_1 = \frac{7}{3} \leq v_0 = 4$

(3)

Hérédité Si on a $u_{n+1} \leq u_n$

alors comme $f \nearrow$ on a $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

cod $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Donc par récurrence $(u_n) \searrow$

c) Par réc $H_n: u_n \geq 2$

init OK

Hérédité $u_n \geq 2, f$ croissante donc $f(u_n) \geq f(2)$

cod $u_{n+1} \geq 2$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 2$

d) (u_n) décroissante minorée donc $\searrow$
seule limite possible 2 donc $\lim u_n = 2$.