Sujet normal

**Ex 4 :** $P_0(x) = 1 \qquad P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - (x-1)P_n'(x)$

1) $P_1(x) = 2xP_0(x) - (x-1)P_0'(x)$
$= 2x$ — de degré 1, de coef dom $2^1$

$P_2(x) = 2xP_1(x) - (x-1)P_1'(x)$
$= 2x(2x) - (x-1)2$ — de degré 2
$= 4x^2 - 2x + 2$ — de coef dom $2^2$

2) On pose $(H_n)$ : il existe $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tq
$P_n(x) = 2^n x^n + Q_n(x)$

init $P_1$ ok.

Hérédité ...

$P_{n+1}(x) = 2x(2^n x^n + Q_n(x)) - (x-1)(2^n . n x^{n-1} + Q_n'(x))$
$= 2^{n+1} x^{n+1} + \left(2xQ_n(x) - 2^n . n x^n + 2^n n x^{n-1} - (x-1)Q_n'(x)\right)$
$= 2^{n+1} x^{n+1} + Q_{n+1}(x)$

or $\deg Q_n \leq n-1$ donc

$$\begin{cases} \deg 2xQ_n(x) \leq n \\ \deg -2^n n x^n = n \\ \deg 2^n n x^{n-1} = n-1 \\ \deg -(x-1)Q_n'(x) \leq 1 + n-1-1 = n-1 \end{cases}$$

donc $\deg Q_{n+1} \leq n$.
et $H_{n+1}$ vraie

Ex5 $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$

- $U_{2n+2} - U_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$

$$= \frac{1}{(2n+2)^2} + \frac{-1}{(2n+1)^2} \leq 0$$

$$U_{2n+3} - U_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)^2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^2} \geqslant 0$$

$$U_{2n+1} - U_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $(U_{2n})$ et $(U_{2n+1})$ sont adjacentes donc CV et CV vers la meme limite. Comme ce sont les sous-suites d'indices pair et impairs $(U_n)$ CV et CV vers la meme limite

On a $|U_{2n+1} - U_{2n}| = \frac{1}{(2n+1)^2} \leq \varepsilon$

ssi $2n+1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ssi $n \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2}$

```
eps = input('Precision?')
n = floor(1/(2*sqrt(eps)-1/2)) + 1;
S=0;
for k = 1:2*n do
  S = S+((-1)^k)/(k^2);
end
disp(S).
```

Ex 6 : 1) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in E_A$

Si $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} \in E_A$ $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$A\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right) = \lambda . A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = \lambda.0+0 = 0$$

donc $\lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} \in E_A$

2) Si A inversible, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_A$ ssi $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

ssi $A^{-1}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ssi $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

donc $E_A = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

3) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_A$ ssi $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y+z=0\\x+y+z=0\end{cases}$

ssi $\begin{cases}x+y=-z\\x+2y=-z\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x+y=-z\\y=0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x=-z\\y=0\end{cases}$

Donc $E_A = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{matrix}x+z=0\\y=0\end{matrix}\right\}$

$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_A$ ssi $v = \begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc

$E_A = \text{vect}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ libre donc une base de $E_A$

4) $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $u, v$ libre? OK.

b) $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient par ex.

c) $(u, v, w)$ base de $\mathbb{R}^3$ donc il existe $\alpha \beta \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

d) $$A e_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}$$

de même $A e_2 = \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$ et $A e_3 = \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$

e) On a $e_i = \alpha_i u + \beta_i v + \gamma_i w$ pour $i = 1, 2, 3$

donc $A e_i = \alpha_i A u + \beta_i A v + \gamma_i A w$

cad $A e_i = \gamma_i C$

donc $A e_i$ est proportionnelle à $C$