DEVOIR SURVEILLÉ 3
ECS1 13-12-14

1. Partie Commune

Exercice 1 (Probabilités). Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que :

- 2% des personnes testées sont en état d'ébriété.
- 95 fois sur 100 l'alcootest a donnée un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété
- 95 fois sur 100 l'alcootest a donnée un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

(1) On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
(2) On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est négatif. Quelle est la probabilité que cette personne ne soit pas en état d'ébriété ?
(3) Déterminer la probabilité que le résultat donné par l'appareil soit faux.

Exercice 2 (Jeu d'enfants, Commun). Deux enfants jouent aux pirates. L'un deux a caché des pièces d'or et d'argent dans trois coffres. Dans un coffre, il y a deux pièces d'or, dans l'autre une pièce d'or et une d'argent et dans le dernier deux pièces d'argent. L'autre enfant trouve un trésor, il ouvre le coffre fouille et en sort une pièce d'or. Quelle est la probabilité que l'autre pièce soit aussi en or ?

Exercice 3. (1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}.$$

(a) Donner les limites possibles pour (u_n).
(b) Montrer que (u_n) est monotone.
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq 2$.
(d) Conclure sur la convergence et la limite de (u_n).

(2) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{3v_n + 2}{v_n + 2}.$$

(a) Donner les limites possibles pour (v_n).
(b) Montrer que (v_n) est monotone.
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2 \leq v_n$.
(d) Conclure sur la convergence et la limite de (v_n).

Date: ECS1 13-12-2014.

2. Sujet normal

Exercice 4 (Polynômes). On considère la famille de polynôme P_n définie par $P_0(X) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) + (X-1)P_n'(X).$$

(1) Calculer P_1 et P_2 puis donner leurs coefficients dominants et leurs degrés.
(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^n.

Exercice 5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

(1) Montrer que les deux suites $(a_n) = (u_{2n})$ et $(b_n) = (v_{2n+1})$ sont adjacentes.
(2) Montrer que (u_n) converge. On note ℓ la limite de (u_n).
(3) En déduire un programme qui demande une précision ε à l'utilisateur et affiche une valeur approchée de ℓ à ε près.

Exercice 6 (Algèbre linéaire et calcul matriciel - sujet normal). Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice carré de taille 3. On note

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$E_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Montrer que E_A est un espace vectoriel.
(2) Que dire de E_A si A est inversible ?
(3) Dans cette question uniquement on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'alors $E_A = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + z = 0 \text{ et } y = 0\}$. Puis donner une base de E_A.
(4) On note $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On suppose que u et v sont dans E_A.
   (a) Montrer que la famille (u, v) est libre.
   (b) Trouver un élément $w \in \mathbb{R}^3$ tel que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
   On pose alors $C = Aw$.
   (c) Justifier que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha u + \beta v + \gamma w$.
   (d) Justifier que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, Ae_i est la i-ième colonne de la matrice A.
   (e) En déduire que toutes les colonnes de A sont proportionnelles à C.

3. Sujet plus difficile

Exercice 7 (Polynômes). On considère la fonction f définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par

$$f(P)(X) = X^2P'(X) + 3XP''(X).$$

(1) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.
(2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $f(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
(3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de coefficient dominant α et de degré exactement n. Donner le coefficient dominant et le degré de $f(P)$.

Exercice 8. (1) Calculer la limite $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.
(2) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $\frac{1}{x+1} \leq \ln(1+\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$.
(3) Donner les variations de $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire que $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ est croissante.
(4) De manière analogue, montrer que $v_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ est décroissante.
(5) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
(6) En déduire un programme en Scilab qui demande une précision ε à l'utilisateur et affiche une valeur approchée de e à ε près.

Exercice 9 (Algèbre linéaire et calcul matriciel). On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 3×3 à coefficients réels, I_3 la matrice identité de taille 3 et 0 la matrice nulle de taille 3. On considère, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = M\}$ et $E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A^2M = AM\}$.

Partie I

(1) Montrer que $E_1(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(2) (a) Montrer que $E_1(A) \subset E_2(A)$
 (b) Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.
(3) (a) Montrer que si $A - I_3$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.
 (b) On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1} et vérifier que $C = PDP^{-1}$.
(2) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, On pose $N = P^{-1}M$. Montrer que $M \in E_1(C)$ si et seulement si $N \in E_1(D)$. On cherche maintenant à étudier D pour en déduire des résultats sur C.
(3) Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
(4) En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$, puis une base de $E_1(C)$.
(5) Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$, puis une base de $E_2(C)$. Est ce que $E_2(C) = E_1(C)$?