

Ex 11: $u_0 = 1$
 $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

Limites possibles: Si $u_n \rightarrow l$ alors $l = \sqrt{1+l}$

donc $l^2 = l+1$

donc l racine de $x^2 - x - 1$

de discriminant $\Delta = 1+4 = 5$

de racines $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

De plus par récurrence immédiate $u_n \geq 0$

donc $l \geq 0$ donc la seule limite possible est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Étudions $f(x) = \sqrt{1+x}$ sur $\mathbb{R}^+$

f dérivable et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geq 0$

donc f croissante.

$u_0 = 1$ $u_1 = \sqrt{2} \geq u_0$

puis par récurrence $u_{n+1} \geq u_n$
 et (u_n) croissante

Mq par récurrence (immédiate) $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

donc (u_n) croissante majorée donc CV

et donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ car c'est la seule limite possible.

Ex 19

$$v_0 = 1$$

$$v_{n+1} = 1 + v_n^2$$

Limites possibles si $v_n \rightarrow l$ alors $l = 1 + l^2$
cad l solution de $x^2 - x + 1$ de discriminant
 $\Delta = 1 - 4 < 0$ donc (v_n) diverge.

De plus $v_{n+1} - v_n = 1 + v_n^2 - v_n > 0$
donc (v_n) croissante (et divergente)
donc $\lim v_n = +\infty$

Ex 13 $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$
 $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$

Supposons $a_0 \leq b_0$

$$\text{on a } a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3} (a_n - b_n)$$

$$\text{donc } (a_n - b_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_0 - b_0) \leq 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b_n$

$$\text{calculons } a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3} \geq 0. \quad (a_n) \nearrow$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{3} \leq 0. \quad (b_n) \searrow$$

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_0 - b_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc convergent
vers la même limite l .

Si $a_0 > b_0$ on fait un raisonnement
analogue.

Calculer

$$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = a_0 + b_0$$

puis à la limite $2l = a_0 + b_0$

$$\text{donc } l = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Ex 14. Si $\cos(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

1) On a $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$

donc $l = 2l^2 - 1$

donc l racine de $2x^2 - x - 1$

de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$

de racines $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

2) $\cos(3n) = \cos(n)\cos(2n) - \sin(n)\sin(2n)$
 $= \cos n (2\cos^2 n - 1) - 2\sin^2 n \cos n$
 $= 2\cos^3 n - \cos n - 2(1 - \cos^2 n)\cos n$

$$\cos(3n) = 4\cos^3 n - 3\cos n$$

Donc l vérifie $l = 4l^3 - 3l$

or $l \neq 0$ donc $4l^2 = 4$

$$l^2 = 1$$

$$l = \pm 1$$

Finalement la seule limite possible est 1

$$3) \text{ On a } \cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$$

$$\text{or } \lim \cos^2(n) = 1$$

donc $\sin^2(n)$ converge et vers 0

$$\text{donc } \sin(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$4) \cos(n+1) = \cos(n) \cdot \cos(1) - \sin(n) \sin(1)$$

$$\text{à la limite } 1 = 1 \cdot \cos(1) - 0 \sin(1)$$

$$\text{donc } \cos(1) = 1$$

$$\text{Absurde car } 1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

et $\cos$ strict décroissant sur

$$]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{Ex 15, 1) } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

$$a) \text{ Si } (u_n) \xrightarrow{+\infty} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$ il existe N tq pour $n \geq N$ on a $|u_n| \leq \varepsilon$

$$\text{alors pour } n \geq N \text{ on a } |v_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k| + \frac{1}{n} (n-N) \varepsilon$$

$$\leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^N |u_k| - N\varepsilon \right) + \varepsilon$$

or la suite $\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^N |u_k| - N\varepsilon \right)$ tend vers 0 donc il existe

$$N_1 \text{ tq pour } n \geq N_1, \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^N |u_k| - N\varepsilon \right) \leq \varepsilon$$

(4)

Donc $|v_n| \leq \varepsilon + \varepsilon$

Finalement $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

b) Si $v_n \rightarrow l$

$$|v_n - l| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |v_k - l|$$

or $(v_k - l)$ tend vers 0 donc $|v_n - l|$ aussi par (a).

c) Si $v_n = (-1)^n$

$$\text{alors } \sum_{k=1}^n v_k = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Alors $v_n \rightarrow 0$ et $v_n \neq 0$.

et a) (v_n) strict positive et $v_n \rightarrow l > 0$

$$\text{alors } \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \right)^{1/n} > 0 \text{ et } \ln \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \right)^{1/n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(v_k)$$

$\ln(v_k)$ tend vers $\ln(l)$ donc par (1b)

$$\text{la suite } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln v_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(l)$$

$$\text{puis } \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \right)^{1/n} = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(v_k) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$$

b) Si $(v_{n+1} - v_n)_n$ tend vers l

$$\text{alors } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) \text{ tend aussi vers } l \text{ par (1b)}$$

$$\text{or } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = \frac{1}{n} (v_{n+1} - v_1)$$

$$\text{or } -\frac{v_1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{donc } \frac{1}{n} v_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$$

$$\text{mais } \frac{1}{n} v_n = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n-1} v_n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \cdot p = p$$

Donc $\frac{v_n}{n}$ tend vers p en ∞ .