

CALCULS

Exercice 1 (Fractions). (1) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ quatre réels. Donner les ensembles des valeurs possibles pour ces réels puis simplifier si possible les expressions suivantes.

$$\begin{array}{llll} 1) & \frac{ab}{cb} & 2) & \frac{a+b}{c+b} \\ 3) & \frac{a}{c} & 4) & \frac{a}{b} \\ 5) & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} & 6) & \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \\ 7) & \frac{a+b}{c} & 8) & \frac{\frac{a}{b}}{b+c} \end{array}$$

(2) Simplifier et calculer ($n \in \mathbb{N} - \{0, -1\}$)

$$\begin{array}{llll} 1) & \frac{7}{8} \frac{2}{3} & 2) & \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \\ 3) & \frac{2+3}{3} & 4) & \frac{3}{3+5} \\ 5) & \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{4 \times 5 \times 6 \times 7} & 6) & \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} \\ 7) & \frac{-1}{\frac{8}{3}} & 8) & \frac{4}{-\frac{2}{3}} \\ 9) & \frac{2}{5} - \frac{3}{10} + \frac{2}{15} & 10) & \frac{1}{n^2} - \frac{3}{2n} \\ 11) & \frac{2}{9} - \frac{1}{15} + \frac{5}{6} & 12) & \frac{n^2+2n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \end{array}$$

Exercice 2 (Exponentielles). Regrouper les expressions suivantes sous la forme $\exp(u(x))$.

$$\begin{array}{l} (1) \quad \frac{e^x}{e^2} \\ (2) \quad e^3 \exp(2x) \\ (3) \quad (\exp(x))^2 \\ (4) \quad \frac{\exp(2x-3)}{e^3} \\ (5) \quad \frac{\exp(x^2)}{e} \end{array}$$

Écrire les expressions suivantes en fonction de $e^x = \exp(x)$.

$$\begin{array}{l} (1) \quad \exp(2x) \\ (2) \quad \exp(x+1) \\ (3) \quad e^{x-1} \\ (4) \quad \exp 2x - 4 \end{array}$$

Exercice 3 (Logarithme). Écrire les expressions suivantes en fonction de $\ln(x)$

$$\begin{array}{l} (1) \quad \ln(x^2) \\ (2) \quad \ln(\sqrt{x}) \\ (3) \quad \ln\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\right) \\ (4) \quad \ln(2x) \end{array}$$

Regrouper les expressions suivantes sous la forme $\ln(u(x))$.

$$\begin{array}{l} (1) \quad \ln(x) + \ln(7) \\ (2) \quad 3 \ln(x) - \ln(2) \\ (3) \quad \frac{1}{3} \ln(x-1) + 1 \end{array}$$

Simplifier, si possible, les expressions suivantes

$$\begin{array}{l} (1) \quad \ln(\exp(-3)) \\ (2) \quad \ln\left(\frac{e^3}{2}\right) \\ (3) \quad e^{2 \ln(x)+2} \end{array}$$

Exercice 4 (Racines). (1) Quel est le domaine de définition de $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$?

(2) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \leq 1$.

Exercice 5 (Valeurs absolues). Dessiner les courbes représentatives des fonctions suivantes

- (1) $f : x \mapsto |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$
- (2) $g : x \mapsto |x^2 - 1|$

Exercice 6 (Équations). Résoudre les équations suivantes

- (1) $\ln(3x - 2) = 0$
- (2) $\ln(3x + 1) = 1$
- (3) $\exp(2x - 1) = 0$
- (4) $\exp(4x + 2) = 1$
- (5) $e^x = 2$
- (6) $e^{3x-1} = 3$
- (7) $e^{2x} + 2e^x + 1 = 0$ (on pourra poser $y = e^x$).

Résoudre les équations suivantes

- (1) $X^2 + 2X + 1 = 0$
- (2) $X^2 + X + 1 = 0$
- (3) $X^2 - 4X + 1 = 0$
- (4) $X^2 + 3X + 1 = 0$
- (5) $X^2 + 3X - 1 = 0$
- (6) $X^4 + 2X^2 + 1 = 0$ (on pourra poser $Y = X^2$)

Résoudre les équations et inéquations suivantes

- (1) $|x - 1| = 1$
- (2) $|x + 2| \leq 5$
- (3) $|x - 1| > 7$
- (4) $|x - 1| + |x + 1| = 2$

Résoudre les équations et inéquations suivantes

- (1) $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.$
- (2) $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq |x - 2|.$
- (3) $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq x - 2.$
- (4) $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq |3x + 2|.$
- (5) $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 3x + 2.$
- (6) $\sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 2x + 1.$
- (7) $\sqrt{2x^2 + 11x + 12} = 6 - x.$
- (8) $x = \sqrt{x + 2}.$
- (9) $\sqrt{x^2 + 3x} \leq x + 1.$
- (10) $\sqrt{x^2 - 7x + 10} \geq x - 3.$
- (11) $\sqrt{x + 5} \geq \sqrt{x^2 - 4}.$

Exercice 7 (Domaines de définition). Donner le domaine de définition des fonctions suivantes

- (1) $x \mapsto \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}$
- (2) $x \mapsto x^{\frac{2^{2x}}{x^2 - 1}}$
- (3) $x \mapsto x \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$
- (4) $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$
- (5) $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln|x|}}{x}$
- (6) $x \mapsto \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}}$
- (7) $x \mapsto \sqrt{1 + \ln(x)}$