VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

Exercice 1. On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs $0, 1, 2$ et 3. On donne $P(X = 0) = \frac{1}{10}, P(X = 1) = \frac{1}{8}$ et $P(X = 2) = \frac{1}{5}$. Déterminer la loi de X, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Donner la loi de Y, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

Exercice 2. (1) On pioche successivement deux boules, sans remise, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

(2) On pioche successivement deux boules, avec remise, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note Y la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus. Donner la loi de Y, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

Exercice 3. Un plongeur de restaurant lave 30 verres, 10 de chaque type A, B et C. Au cours de la vaisselle, deux verres sont cassés au hasard.

(1) (a) Définir un espace probabilisé décrivant l'expérience.
   (b) Quelle est la probabilité pour que les deux verres cassés soient du même type ?
   (c) Quelle est la probabilité de casser au moins un verre de type A ?
   (d) Quelle est la probabilité de casser un verre du type B et un verre du type C ?

(2) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de verres cassés de type A.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Calculer l'espérance de X et sa variance.

Exercice 4. Une société de transport urbain a pour obligation d'avoir en permanence en circulation 8 autobus sur le réseau A de la ville et 10 sur le réseau B. Elle dispose pour cela de 20 véhicules. Chacun d'eux a une probabilité $0,1$ d'être indisponible (pannes révisions ..). (On pourra conserver les résultats sous forme de sommes).

(1) Déterminer la loi de probabilité du nombre de bus de la société en état de marche.
(2) Déterminer la probabilité pour que la société ne respecter pas son engagement.
(3) Elle acquitte une pénalité forfaitaire de a euros si elle ne fournit pas le nombre convenu de bus sur le réseau A et de b euros sur le réseau B ($a < b$). Si la société réparti ses bus afin de minimiser les pénalités, déterminer la loi de la variable aléatoire Y donnant le montant de cette pénalité et calculer une valeur approchée de son espérance si $a = 400$ et $b = 600$.

Exercice 5. On joue avec deux dés, l'un vert et l'autre rouge. sur une petite table de telle sorte que chaque dés a la probabilité q, $0 < q < 1$ de tomber à terre.

On note S la variable aléatoire égale à la somme des marques affichées par les dés restés sur la table. Si les deux dés sont tombés on pose $S = 0$.

(1) Déterminer la loi de S. (il sera commode d'introduire la variable aléatoire égale au nombre de dés restant et de poser $p = 1 - q$).
(2) En utilisant les deux variables aléatoires X_1 et X_2 donnant la valeur des marques des dés verts et rouges restés sur la table et zéro sinon, calculer $E(S)$ et $V(S)$ en fonction de p et q. (on admettra comme pour une des démonstrations sur la loi binomiale, $E(X_1+X_2) = E(X_1)+E(X_2)$ et comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$.)

Exercice 6. On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par : $P(X = 1) = \frac{1}{5}, P(X = e) = \frac{3}{5}$ et $P(X = e^2) = \frac{1}{5}$ et on pose $Y = \ln(X)$.

(1) Calculer l'espérance de Y.
(2) Montrer que $\frac{1+3e+e^2}{5} \neq e$ et en déduire que $\ln(E(X)) \neq E(\ln(X))$.

Exercice 7. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n on effectue p tirages avec remise. Soit X la VAR égale au plus grand numéro tiré. Déterminer la loi de X. (On pourra utiliser la fonction de répartition).

Date: ECS1 2014-15.