

SOMMES

Exercice 1. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ?

- | | |
|---|---|
| <p>(a) $\sum_{i=1}^n \alpha + a_i = \sum_{i=1}^n a_i + \alpha$</p> <p>(c) $\sum_{i=1}^n \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^n a_i$</p> <p>(e) $\sum_{i=1}^n a_i^\alpha = (\sum_{i=1}^n a_i)^\alpha$</p> <p>(g) $\prod_{i=1}^n \alpha a_i = \alpha \prod_{i=1}^n a_i$</p> <p>(i) $\prod_{i=1}^n (a_i + b_i) = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{i=1}^n b_i$</p> | <p>(b) $\sum_{i=1}^n a_i + b_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$</p> <p>(d) $\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i$</p> <p>(f) $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j}$</p> <p>(h) $\prod_{i=1}^n a_i b_i = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^n b_i$</p> |
|---|---|

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes

- | | | |
|---|---|--|
| <p>(a) $\sum_{n=m}^p 1$</p> <p>(d) $\sum_{k=0}^n (k+1)$</p> <p>(h) $1.n + 2.(n-1) + \dots + (n-1).2 + n.1$</p> | <p>(b) $\sum_{n=m}^p n$</p> <p>(e) $\sum_{k=0}^n k(n-k)$</p> <p>(i) $\sum_{k=1}^{2n} (2i)^k$</p> | <p>(c) $\sum_{n=3}^{12} n^2$</p> <p>(f) $\sum_{k=0}^n k(k+1)(n-k+2)$</p> <p>où $i^2 = -1$</p> |
|---|---|--|

Exercice 3. (1) Développer le polynôme $P(x) = (1+x)^n$

(2) En dérivant ce polynôme P , calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

(3) En intégrant le polynôme P , calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

(4) En développant de deux manières différentes le polynôme $(1+x)^a(1+x)^b$, montrer que

$$\sum_{k=0}^c \binom{k}{a} \binom{c-k}{b} = \binom{c}{a+b},$$

on posera le coefficient binomial $\binom{k}{n} = 0$ si $k > n$.

Exercice 4. En utilisant les sommes télescopiques, calculer

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad \sum_{k=1}^n k.k!, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}.$$

Exercice 5. Montrer que $\sum_{k=0}^n k \leq (n+1)!$.

Exercice 6 (Produits de pairs et d'impairs). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'écriture des produits suivants à l'aide de factorielles :

$$P = 2n(2n-2) \cdots 2$$

$$I = (2n+1)(2n-1) \cdots 1.$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n (-1)^k k$. (On pourra distinguer les cas pairs et impairs).

Exercice 8. Soient n, p deux entiers naturels non nuls. Calculer

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^p i^3 \ln(k) \right) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n \frac{i}{j} \right).$$

Exercice 9. Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$.