POLYNÔMES

Exercice 1. (1) Montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[x], P(x) = XP'(x)\}$ est un espace vectoriel.

(2) Montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_4[X], P'(x+1) = 0\}$ est un espace vectoriel.

(3) On pose P_1, P_2 et P_3 les polynômes

$$P_1 = X + 1, \quad P_2 = X^2 + 2X, \quad P_3 = 2X^3 + X^2 - 4.$$

La famille (P_1, P_2, P_3) est elle libre ?

(4) On pose P_1, P_2 et P_3 les polynômes

$$P_1 = 1, \quad P_2 = X^2 + 2X, \quad P_3 = X^2 + 2X - 4.$$

La famille (P_1, P_2, P_3) est elle libre ?

(5) Montrer que la famille $(X-2, 1, X^3+2, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(6) Montrer que la famille $(2, X-4, X^3)$ est libre puis compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(7) Montrer que la famille $(X-2, X^2-4, X^3+1)$ est libre puis compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(8) Montrer que la famille $(X-2, X-4, X^2)$ est libre puis compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(9) Montrer que la famille $(X-2, X-3, X-4)$ est liée puis la réduire en une famille libre engendrant le même espace vectoriel.

(10) Montrer que la famille $(X^2-2, X, 2X^2-4X)$ est liée puis la réduire en une famille libre engendrant le même espace vectoriel.

(11) Montrer que la famille $(X-X^3, X, X^3)$ est liée puis la réduire en une famille libre engendrant le même espace vectoriel.

Exercice 2 (Polynômes d'Interpolation de Lagrange, dur mais classique). Soit p un entier et $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p.

(1) Quel est la dimension de $\mathbb{R}_p[X]$

(2) Soient $\lambda_0, \cdots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts. On considère les polynômes $L_0, \cdots, L_p$ définis par

$$L_k(X) = \Pi_{0 \leq i \leq p, i \neq k} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}$$

Donner l'expression des polynômes dans le cas $p = 3$ et $\lambda_i = i$.

(3) Montrer que pour tout $k = 0, \cdots, p$, L_k est l'unique polynôme tel que $L_k(a_i) = 0$ si $i \neq k$ et $L_k(k) = 1$.

(4) Montrer que les $(L_k)_{k=1,\cdots,p}$ forment une base de $\mathbb{R}_p[X]$ (on pourra calculer la valeur sur les λ_i).

(5) Déterminer les coordonnées de X^m dans cette base.

(6) Déterminer les coordonnées d'un polynôme quelconque dans cette base.

(7) Montrer que $\sum_{i=0}^{p} L_i = 1$.

Date: ECS1 2014-15.

Exercice 3 (Dur mais classique). On définit une suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 2, P_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

- Calculer P_2 et P_3.
- Déterminer le coefficient dominant et le degré de P_n.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, on a $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
- En déduire une expression simple de $P_n(2\cos(\theta))$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.
- Déterminer les racines de P_n.

Exercice 4. On veut résoudre l'équation $P'^2 = 4P$, d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$.

- Est ce que l'ensemble des solutions de l'équation est un espace vectoriel ?
- Chercher les polynômes constants solutions.
- Trouver le degré des polynômes solutions de l'équation.
- Donner les solutions.

Exercice 5. Effectuer la division euclidienne de P par Q.

- $P = X^3 + 3X^2 - 2$, $Q = iX + 1$
- $P = X^3 + iX^2 + X$, $Q = X - i + 1$.

Exercice 6. Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles

- $X^4 - 1$ Dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$
- $X^5 - 1$ Dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$
- $X^3 - 4\sqrt{2}(1 - i)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 7 (Dur). Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(a)X^n + 1$.

Exercice 8. Soit $n > 3$ un entier et

$$P = nX^{n+1} + (1 - 2n)X^n + (n - 2)X^{n-1} + X^{n-2} + nX^2 - 2nX + n.$$

Montrer que 1 est racine d'ordre exactement 2 de P.

Exercice 9. Soit $P \in \mathbb{R}_{2p+1}[X]$ tel que pour tout $k = 0, \cdots, 2p + 1$, on a $P^{(k)} < 0$.

(1) (a) Déterminer le degré de P.
    (b) En déduire que P admet une racine réelle.
(2) En utilisant la formule de Taylor, montrer que toutes les racines réelles de P sont strictement négatives.