

SUITES RÉELLES

Exercice 1. Soit u_n une suite croissante de limite l . On pose $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$.

- Montrer que v_n est croissante.
- Etablir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
- En déduire que $v_n \rightarrow l$.

Exercice 2. Soit $u_n = \prod_{k=2}^n \cos(\frac{\pi}{2^k})$ pour $n \geq 2$.

- Montrer que la suite u_n converge
- Déterminer la limite de u_n (on pourra introduire la suite définie par $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$).

Exercice 3. Soit w_n définie pour $n \geq 1$ par $w_n = \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k^2}$.

- a Déterminer l'expression de w_{n+1} en fonction de w_n .
- b En majorant $\frac{1}{k^2}$, par $\frac{1}{n^2}$, majorer w_n et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

Exercice 4. Soit u_n et v_n telles que (u_n) et (v_n) soient compris entre 0 et 1 et telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = 1$. Étudier la convergence de ces suites.

Exercice 5. Soit u la suite vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$ avec $u_0 > 0$ et $u_1 > 1$.

- 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On considère alors la suite définie par $w_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Montrer que la suite w_n est récurrente linéaire d'ordre 2 et expliciter w_n en fonction de n, w_0 et w_1 . Déterminer la limite de w_n .
- 3 Calculer la limite de u_n .

Exercice 6. On considère la suite S_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

- 1 Soit $x \in \mathbb{R}$ montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\frac{|x|^n}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \frac{|x|^N}{N!}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{n!}$.

- 2 On suppose que $x \leq 0$.
 - a Montrer que les suites S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes.
 - b Montrer que pour tout entier naturel n , le signe de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^- & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{array}$$

est celui de $(-1)^{n+1}$.

- c Déduire des questions précédentes que la suite converge vers e^x .

- 3 On suppose $x > 0$.
 - a Montrer que la suite S_n est majorée.
 - b Montrer que la suite S_n converge.

Exercice 7. Soit u_n une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$. Montrer que les suites extraites S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes et en déduire que S_n converge.

En déduire la nature de la suite $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice 8. 1. a Étudier rapidement les variations et tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = x - x^2$.

- b On considère la suite u_n définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in]0, 1[$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
- c En déduire que la suite définie par $v_n = nu_n$ est croissante.
- d Montrer que la suite v_n a une limite $\lambda \in]0, 1[$.
- e Montrer que la suite $n(v_{n+1} - v_n)$ a une limite que l'on déterminera.

- 2 a Soit t_n une suite croissante telle qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que pour tout $n > N_0$,

$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{a}{n}.$$

Montrer que pour tout $n \geq N_0$, $t_{2n} - t_n \geq \frac{a}{2}$.

c En déduire que t_n tend vers l'infini.

c Montrer que pour $\lambda \neq 1$, la suite v_n vérifie les mêmes conditions que t_n .

d Trouver la valeur de λ .

Exercice 9. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère l'équation $x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0$. On définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$.

1 Montrer que cette équation admet une unique solution (que l'on notera a_n), dans l'intervalle $[0, 1]$.

2 Étudier la monotonie de la suite a (On pourra calculer $f_{n+1}(a_n)$).

3 Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_n - \frac{1}{2} = \frac{a_n^{n+1}}{2}$.

Exercice 10. Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, supposée continue et monotone, et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in [a, b] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.

(2) Application :

$$u_0 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$

(3) On suppose que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.

(4) Application :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$

Calculer les limites des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11. Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Exercice 12. Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + u_n^2$.

Exercice 13. Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$.

(1) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

(2) En calculant $a_n + b_n$, montrer qu'elles convergent vers $\frac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 14. Le but de l'exercice est de montrer par l'absurde que $(\cos(n))$ diverge. Supposons que $(\cos(n))$ converge et notons ℓ sa limite.

(1) En utilisant $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$, montrer que ℓ vérifie $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$.

(2) Exprimer $\cos(3n)$ en fonction de $\cos(n)$ puis en déduire que la seule limite possible est $\ell = 1$.

(3) En utilisant $\cos(n + \frac{\pi}{2}) = \sin(n)$, montrer que $(\sin(n))$ converge aussi vers ℓ .

(4) En utilisant $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$ montrer que cela est absurde.

Exercice 15 (Théorème de Césaro). Soit (u_n) une suite réelle.

(1) On note (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$v_n = \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n}.$$

(a) Montrer que si (u_n) converge vers 0, alors (v_n) converge également vers 0. (On pourra montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et n assez grand, on a $|v_n| \leq \epsilon$).

(b) Montrer que si (u_n) converge vers ℓ , alors (v_n) converge également vers ℓ .

(c) Montrer, à l'aide d'un contre exemple, que la réciproque est fautive.

(2) (a) Soit (u_n) une suite strictement positive convergeant vers une limite ℓ strictement positive. Montrer que la suite $\left(\left(\prod_{k=1}^n u_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ converge et déterminer sa limite.

(b) Soit (u_n) une suite telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers une limite ℓ . Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers ℓ .