

PROBABILITÉS FINIES

Exercice 1. Un tiroir contient n chaussettes dont 3 rouges. Quelle doit être la valeur de n pour qu'en prenant au hasard 2 chaussettes, la probabilité qu'on obtienne 2 chaussettes rouges soit égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 2. On lance un dé équilibré deux fois de suite.

- (1) Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros obtenus soit égale à 8 ?
- (2) Il y a 11 sommes possibles ; Pourquoi la probabilité précédente n'est pas égale à $\frac{1}{11}$?

Exercice 3. On dispose d'une urne contenant 5 boules noires et 3 boules blanches. On extrait des boules de cette urne une par une et sans remise. Pour tout $n = 1 \cdots 8$, on note E_n l'évènement "la première boule noire est obtenue au n -ième tirage".

- (1) Exprimer E_1, E_2, E_3, E_4 en fonction d'évènements élémentaires.
- (2) En déduire les probabilités de E_1, E_2, E_3, E_4 .
- (3) Déterminer $P(E_n)$ pour $n \geq 5$.

Exercice 4. On dispose de deux urnes U et V . L'urne U contient 5 boules noires et 3 boules blanches et l'urne V contient 6 boules noires et 2 blanches.

- (1) On choisit une urne au hasard et on en extrait une boule.
 - (a) Quelle est la probabilité que cette boule soit noire ?
 - (b) On constate que l'on a obtenu une boule noire, quelle est la probabilité que l'on ait tiré dans l'urne U ?
- (2) On choisit une urne au hasard et on en extrait des boules une à une et sans remise. On note E_n l'évènement la première boule noire est tirée au n -ième tirage et B_n l'évènement on obtient une boule blanche au n -ième tirage. Exprimer E_n en fonction de (B_k) puis donner la probabilité de E_n .

Exercice 5. On jette trois fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b, c les résultats des trois lancers. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que le polynôme Q ait deux racines réelles distinctes, une racine double ou n'ait pas de racine réelle.

Exercice 6. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n boules en remettant la boule après tirage si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanche. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une blanche en n tirages ?

Exercice 7. On considère une particule se déplaçant à chaque seconde sur l'un des sommets d'un triangle ABC selon le procédé suivant :

- Si la particule se trouve en B elle y reste.
- Si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
- Si la particule se trouve en C, elle se trouve à la seconde suivante en C une fois sur trois et elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.

À la première seconde, elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n, B_n et C_n respectivement l'évènement la particule se trouve en A, B et C à l'instant n et a_n, b_n et c_n les probabilités de ces évènements.

- (1) Que valent a_1, b_1 et c_1 ?
- (2) Donner une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n et c_n .
- (3) Montrer que $c_n = (\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{6})^n$ et en déduire a_n et b_n .
- (4) Étudier la convergence des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) .

Exercice 8. Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que

- S'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec une probabilité $\frac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier n , on note A_n l'évènement le joueur gagne la n -ième partie. De plus on pose pour $n \geq 2$, $E_n = A_{n-1} \cap A_n, F_n = A_{n-1}^- \cap A_n, G_n = A_{n-1} \cap A_n^-, H_n = A_{n-1}^- \cap A_n^-$.

- (1) Montrer que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'évènements.
- (2) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales, que $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.
- (3) Exprimer de la même manière (sans explications) $P(F_{n+1}), P(G_{n+1}), P(H_{n+1})$, en fonction de $P(E_n), P(F_n), P(G_n), P(H_n)$.
- (4) Pour tout entier $n \geq 2$, on note

$$U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$.

- (5) Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $\frac{1}{10}Q = P^{-1}$ puis que $M = PDP^{-1}$.

- (6) Montrer par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire l'expression de M^n .
- (7) Dans la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties. Montrer que $U_n = M^{n-2}U_2$.
- (8) En déduire $P(E_n), P(F_n), P(G_n), P(H_n)$.
- (9) En déduire les limites de ces probabilités.
- (10) Exprimer A_n en fonction des évènements précédents et en déduire $P(A_n)$.