Récurrences

Exercice 1. Soit (u_n) une suite de nombres réels tels que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})u_n$. Trouver une expression général pour u_n en fonction de n.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 3. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et pour tout entier n $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n est positive et donc la suite est bien définie.

Exercice 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice 6. Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

Récurrences

Exercice 7. Soit (u_n) une suite de nombres réels tels que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})u_n$. Trouver une expression général pour u_n en fonction de n.

Exercice 8. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 9. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et pour tout entier n $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n est positive et donc la suite est bien définie.

Exercice 10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice 12. Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.