Espaces vectoriels 1

Exercice 1. Vrai ou faux ?

- L'ensemble $\mathcal{A}(E,F)$ des applications d'un ensemble E vers un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(F;+;.)$ muni des lois usuelles : si $f,g \in \mathcal{A}(E,F), \lambda \in R$ et $x \in E$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
- L'ensemble des suites $\mathcal{A}(E,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
- L'ensemble des fonctions réelles paires est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des fonctions $\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0)=1\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes $\{P \in \mathbb{R}[x], P(0)=0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- L'ensemble des polynômes $\{P \in \mathbb{R}[x], deg(P) \leq 6\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- L'ensemble des polynômes $\{P \in \mathbb{R}[x], P+P'=0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 2. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en donner une base.

- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\}$.
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0$ et $x+2y-z=0\}$
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0$ et $x+2y-z=0$ et $2x-y+z=0\}$

Exercice 3. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? Pour chaque famille suivante $\mathcal{F}_i$, donner une base de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}_i$ puis une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de la base de $vect(\mathcal{F}_i)$.

- Dans $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,1),(2,1,3),(0,1,1)\}$
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,1),(1,0,0)\}$
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\{(0,0,0),(1,2,1)\}$
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\{(1,2,3),(1,3,5),(2,0,4),(0,1,2)\}$.

Exercice 4 (Espace vectoriel des matrices). (1) On considère les matrices

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que cette famille de matrices est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i,j = 1,\cdots,n$, on considère la matrice $E_{i,j} = (\delta_{i,j})$, ou $\delta_{i,j}$ est le symbole (de Kronecker) qui vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i=j$. Montrer que la famille $(E_{i,j})_{i,j=1\cdots,n}$ est une base (appelée base canonique) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(3) Soit $T = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tM = -M\}$ Montrer que T est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 5. (1) On pose f_1 et f_2 les fonctions de $[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) = \sin(x) \text{ et } f_2(x) = \cos(x).$$

La famille (f_1, f_2) est-elle libre ?

(2) On pose f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions de $[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) = \sin(x), \quad f_2 = x\sin(x), \quad f_3 = \cos(x) \text{ et } f_4(x) = x\cos(x).$$

La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre ?